Metodo della sostituzione

$$\begin{cases} T(n) = 2T(n/4) + \Theta\sqrt{n} \\ T(1) = \Theta 1 \end{cases}$$

1) eliminare la notazione asintotica -> sostituire con costanti positive

$T(n) = 2T(n/4) + b\sqrt{n}$ $\quad a,b>0$

$T(1) = a$

2) il metodo della sostituzione consiste nel dimostrare per induzione che l'equazione di ricorrenza è $\Theta f(n)$, dove $f(n)$ è una funzione predeterminata. Ovvero:

$T(n) = \Theta f(n)$

- $O f(n) = T(n) \leq c \cdot f(n)$
  trovare un c
- $\Omega f(n) = T(n) \geq c \cdot f(n)$

$f(n) = \sqrt{n} \cdot \lg_2 n$ -> assegno un valore al log xchè elimino asintotica

3) dimostriamo la seconda ipotesi $\Omega f(n)$

- dimostriamo che funziona per il caso base:

  $T(1) = a \geq c\sqrt{n} \cdot \lg n$

  -> $n=1$ $\quad a \geq c\sqrt{1} \cdot \lg 1 = 0$ vale $\forall c$, sempre vero dato che $a>0$

- dimostriamo che funziona per ogni caso: proviamo che vale per T(n) assumendo che valga fino al passo immediatamente precedente.

  $T(n) = 2T(n/4) + b(\sqrt{n}) \geq c \cdot \sqrt{n} \cdot \lg n$

  assumiamo valga fino al precedente $T(n/4) \geq c \cdot \sqrt{\frac{n}{4}} \cdot \lg(n/4)$

  sostituendolo nella formula $T(n) \geq 2 \cdot c\sqrt{\frac{n}{4}} \cdot \lg \frac{n}{4} + b\sqrt{n} =$

  $c \cdot \sqrt{n}\,(\lg_2 n - \lg_2 4) + b\sqrt{n} =$

  $c \cdot \cancel{\sqrt{n}\lg_2 n} - 2c\sqrt{n} + b\sqrt{n} \geq c\,\cancel{\sqrt{n}\lg_2 n}$

$b\cancel{\sqrt{n}} \geq 2c\cancel{\sqrt{n}}$

$b \geq 2c$ $\quad c \leq b/2$

dimostrato

4) dimostriamo la prima ipotesi $O\,f(n)$

- caso base: se il caso base non funziona vi sono due strade:
  1. aggiungere variabile "d" in modo da sistemare i conti $T(n) \leq c\,f(n) + d$ (poco conveniente) e dimostrare l'esistenza di entrambe.
  2. modificare il caso base, tanto non mi interessa per l'asintotica (solo da n grandi)

$T(1) = a \leq c \cdot \sqrt{n} \cdot \lg n$

$n=1$ $\quad a \leq c\sqrt{1} \cdot \lg_2 1 = 0$ impossibile quindi o

$T(n) \leq c\sqrt{n}\lg_2 n + d = O(\sqrt{n} \cdot \lg_2 n)$ oppure cambiamo caso base $T(2) = \Theta 1$

$T(2) = a \leq c\sqrt{2} \cdot \lg_2 2 = c\sqrt{2}$

$c \geq a/\sqrt{2}$

- dimostriamo che vale per tutti gli n in modo simmetrico al precedente:

$T(n) \leq c \cdot \sqrt{n} \cdot \lg_2 n$ vale fino a

$T(n/4) \leq c \cdot \sqrt{\frac{n}{4}} \cdot \lg_2 n/4$

sostituendo in $T(n)$

$T(n) = 2\left(c \cdot \sqrt{n/4} \cdot \lg_2 n/4\right) + b\sqrt{n} \leq c \cdot \sqrt{n} \cdot \lg_2 n$

$c\sqrt{n}\,\cancel{\lg_2 n} - 2c\sqrt{n} + b\sqrt{n} \leq c\sqrt{n}\,\cancel{\lg_2 n}$

$b\cancel{\sqrt{n}} \leq 2c\cancel{\sqrt{n}}$

$c \geq b/2$

Sommatorie utili

- $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta n^2$$
- $$\sum_{i=1}^{x} i^c = \Theta(x^{c+1})$$
- $$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 = \Theta(2^n)$$
- $$\sum_{i=0}^{x} c^i = \frac{c^{x+1}-1}{c-1} = \begin{cases} \Theta c^x & \text{se } c>1 \\ O\,1 & \text{se } c<1 \end{cases}$$
- $$\sum_{i=1}^{n} \lg_2 1 = \log_2(n!) = \Theta\, n \log n$$
- $$\sum_{i=1}^{x} \lg_b^c i = \Theta\, x \log^c x$$
- $$\sum_{i=1}^{x} \frac{1}{i} = \Theta\, lg(x)$$

sostituzione dell'indice sommatorie

$$\sum_{i=0}^{\lg n-1} \frac{1}{\lg n - i} = \sum_{i=1}^{\lg n} \frac{1}{k}$$

$\hookrightarrow k = \lg n - i$

studiamo gli estremi:

- $i=0 \rightarrow k = \lg n$
- $i = \lg n - 1 \rightarrow k = \lg n - (\lg n - 1) = \cancel{\lg n} - \cancel{\lg n} + 1 = 1$

alcune regole logaritmi

$\lg(ab) = \lg a + \lg b$

$\lg(a/b) = \lg a - \lg b$

$2^{\lg_2 a} = a$

$x^{\lg_2 c} = c^{\lg_2 x}$

$\lg a^b = b \lg a$